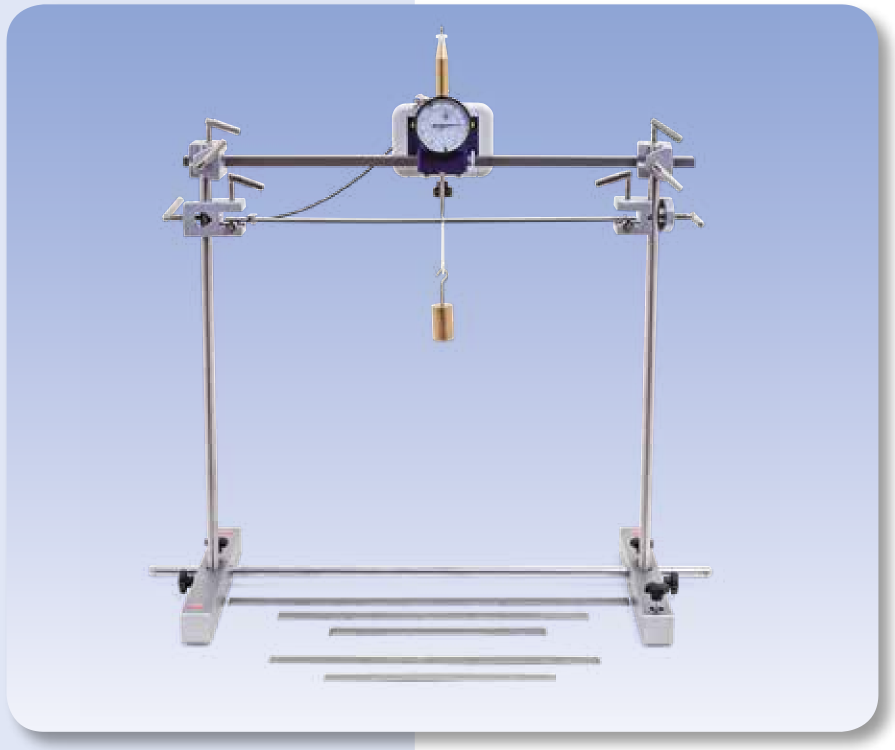
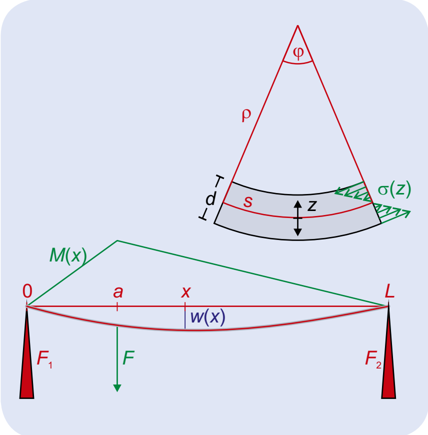
BIEGUNG VON FLACHEN BALKEN





ZIEL

Messung der Verformung von beidseitig unterstützten flachen Balken und Bestimmung des Elastizitätsmoduls

AUFGABEN

- **Messung des Verformungsprofils bei mittiger und außermittiger Belastung**
- **Messung der Verformung in Abhängigkeit von der Kraft**
- **Messung der Verformung in Abhängigkeit von Länge, Breite, Dicke und Material und Bestimmung des Elastizitätsmoduls**

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verformungswiderstand eines ebenen flachen Balkens gegen eine Biegung durch eine äußere Kraft lässt sich analytisch berechnen, wenn die Verformung deutlich kleiner als die Balkenlänge ist. Er ist proportional zum Elastizitätsmodul E des Balkenmaterials. Im Experiment wird durch Messung der Verformung bei bekannter Kraft der Elastizitätsmodul für Stahl und Aluminium bestimmt.

BENÖTIGTE GERÄTE

Anzahl	Geräte	Art.-Nr.
1	Messapparatur Elastizitätsmodul	**1018527**
1	Erweiterungssatz Elastizitätsmodul	**1018528**
1	Taschenbandmaß, 2 m	**1002603**
1	Bügelmessschraube	**1002600**

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Der Verformungswiderstand eines ebenen flachen Balkens gegen eine Biegung durch eine äußere Kraft lässt sich analytisch berechnen, wenn die Verformung deutlich kleiner als die Balkenlänge ist. Er ist proportional zum Elastizitätsmodul E des Balkenmaterials. Also lässt sich aus der Verformung des Balkens bei bekannter Kraft der Elastizitätsmodul bestimmen.

Zur Berechnung teilt man den Balken in parallele Fasern auf, die bei einer Biegung auf der Innenseite gestaucht und auf der Außenseite gedehnt werden. Die neutrale Faser wird weder gedehnt noch gestaucht, während die relative Dehnung bzw. Stauchung ε der übrigen Fasern und die mit ihr verbundene Spannung σ vom Abstand z zur neutralen Faser abhängen:

(1)
$$\varepsilon(z)=\frac{s+\Delta s(z)}{s}=\frac{z}{\rho(x)} \quad \text{und} \quad \sigma(z)=E\cdot\varepsilon(z)$$

$\rho(x)$: lokaler Krümmungsradius der Biegung

Technische Informationen zu den Geräten finden Sie unter 3bscientific.com

2

Zur Krümmung muss daher das lokale Biegemoment

(2)
$$M(x)=\int_A \sigma(z)\cdot z\cdot \mathrm{d}A=\frac{1}{\rho(x)}\cdot E\cdot I$$

$$\text{mit } I=\int_A z^2\cdot \mathrm{d}A\text{: Flächenträgheitsmoment}$$

aufgebracht werden.

Alternativ zum Krümmungsradius $\rho(x)$ wird im Experiment das Verformungsprofil $w(x)$ der neutralen Faser aus der Ruhelage gemessen, die wie folgt berechnet werden kann. Solange die Änderungen $\mathrm{d}w(x) / \mathrm{d}x$ der Verformung genügend klein sind, gilt der Zusammenhang

(3)
$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}(x)=\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{E\cdot I},$$

aus dem man das Verformungsprofil durch zweifache Integration erhält.

Ein typisches Beispiel ist die Betrachtung eines an beiden Enden unterstützten Balkens der Länge L, den eine am Ort a angreifende Kraft F nach unten zieht. Im Gleichgewicht ist die Summe aller angreifenden Kräfte Null:

(4)
$$F_1+F_2-F=0$$

Entsprechendes gilt für die Summe aller Momente, die an einem beliebigen Ort x des Balkens wirken:

(5)
$$M(x)-F_1\cdot x-F_2\cdot(L-x)+F\cdot(a-x)=0$$

An den Balkenenden werden keine Krümmung und keine Verformung hervorgerufen, also ist $M(0) = M(L) = 0$ und $w(0) = w(L) = 0$. Somit ist $M(x)$ vollständig bestimmt:

(6)
$$M(\zeta)=\begin{cases} F\cdot L\cdot(1-\alpha)\cdot\zeta; & 0\le\zeta\le\alpha \\ F\cdot L\cdot\alpha\cdot(1-\zeta); & \alpha<\zeta\le 1\end{cases}$$

$$\text{mit } \zeta=\frac{x}{L} \text{ und } \alpha=\frac{a}{L}$$

Und man erhält durch zweifache Integration das Verformungsprofil

(7)
$$w(\zeta)=\begin{cases} \dfrac{F\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\left[(1-\alpha)\cdot\dfrac{\zeta^3}{6}-\left(\dfrac{\alpha^3}{6}-\dfrac{\alpha^2}{2}-\dfrac{\alpha}{3}\right)\cdot\zeta\right] \\ \dfrac{F\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\left[\dfrac{\alpha^3}{6}-\left(\dfrac{\alpha^3}{6}+\dfrac{\alpha}{3}\right)\zeta+\dfrac{\alpha}{2}\cdot\zeta^2-\dfrac{\alpha}{6}\zeta^3\right]\end{cases}$$

Sein Verlauf wird im Experiment bei mittiger ($\alpha = 0{,}5$) und bei außermittiger ($\alpha < 0{,}5$) Belastung überprüft.

AUSWERTUNG

Bei mittiger Belastung ist $w(x=\frac{L}{2},a=\frac{L}{2})=-\frac{F\cdot L^3}{48\cdot E\cdot I}$

Für ein Rechteck der Breite b und der Höhe d berechnet man

$$I=\int_A z^2\cdot\mathrm{d}A=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2\cdot b\cdot\mathrm{d}z=\frac{d^3}{12}\cdot b$$

Dann ist $w(x=\frac{L}{2},a=\frac{L}{2})=-\frac{1}{4}\cdot\frac{F}{E}\cdot\frac{L^3}{d^3}\cdot\frac{1}{b}$

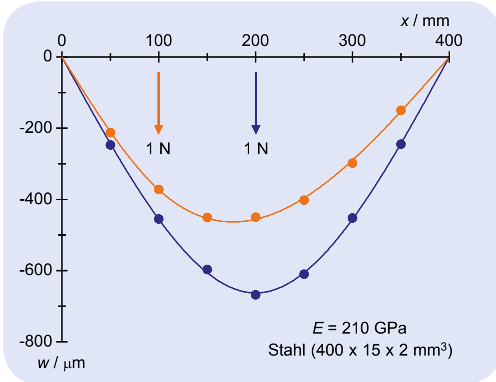


Abb. 1: Gemessenes und berechnetes Verformungsprofil bei mittiger und außermittiger Belastung

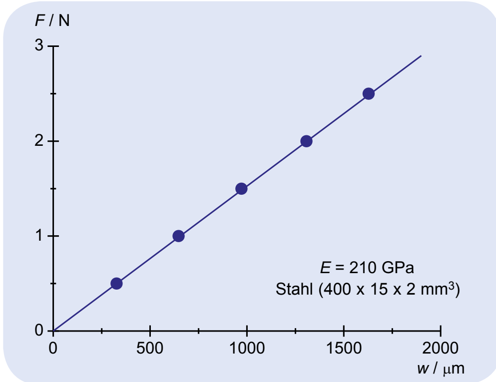


Abb. 2: Bestätigung des Hooke'schen Gesetzes

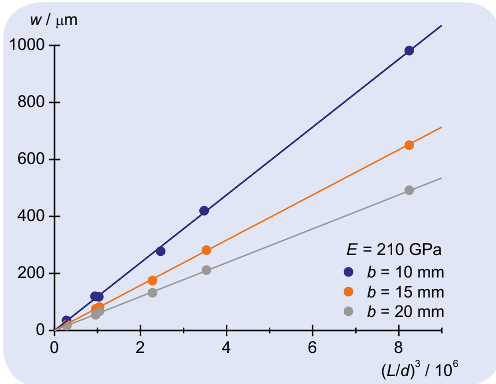


Abb. 3: Abhängigkeit der Verformung von $(L/d)^3$

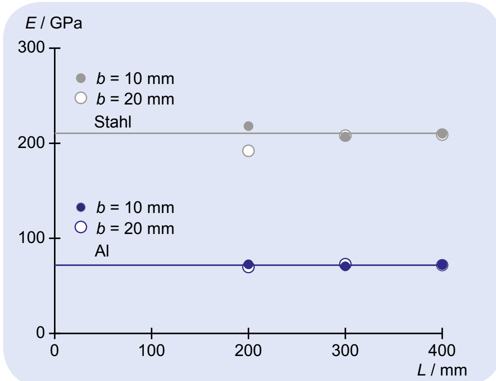


Abb. 4: Elastizitätsmodul von Stahl und Aluminium