GEKOPPELTE SCHWINGUNGEN

AUFGABEN

- **Aufzeichnung der gleichphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T_+.**
- **Aufzeichnung der gegenphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T_-.**
- **Aufzeichnung einer gekoppelten Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T sowie der Schwebungsdauer T_Δ.**
- **Vergleich der gemessenen Werte mit den aus den Eigenschwingungsdauern T_+ und T_- berechneten Werten.**

ZIEL

Aufzeichnung und Auswertung der Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter Pendel

ZUSAMMENFASSUNG

Die Schwingung zweier gleicher, gekoppelter Pendel lässt sich durch die Schwingungsdauer und die Schwebungsdauer charakterisieren. Dabei ist die Schwebungsdauer der Abstand zwischen den zwei Zeitpunkten, an denen ein Pendel jeweils mit minimaler Amplitude schwingt. Beide Größen können aus den beiden Eigenschwingungsdauern für gleich- und für gegenphasige Schwingung der gekoppelten Pendel berechnet werden.

BENÖTIGTE GERÄTE

Anzahl	Geräte	Art.-Nr.	
2	Stabpendel mit Winkelaufnehmer (230 V, 50/60 Hz)	**1000763**	**oder**
	Stabpendel mit Winkelaufnehmer (115 V, 50/60 Hz)	**1000762**	
1	Schraubenfeder 3,0 N/m	**1002945**	
2	Tischklemme	**1002832**	
2	Stativstange, 1000 mm	**1002936**	
1	Stativstange, 470 mm	**1002934**	
4	Universalmuffe	**1002830**	
2	HF-Kabel, BNC/4-mm-Stecker	**1002748**	
1	3B NET*log*™ (230 V, 50/60 Hz)	**1000540**	**oder**
	3B NET*log*™ (115 V, 50/60 Hz)	**1000539**	
1	3B NET*lab*™	**1000544**	

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Bei der Schwingung zweier gekoppelter Pendel wird Schwingungsenergie zwischen beiden Pendeln hin und her übertragen. Sind beide Pendel gleich und werden ihre Schwingungen so angeregt, dass sich zu Anfang ein Pendel in Ruhelage befindet, während das andere schwingt, so geschieht die Energieübertragung sogar vollständig. d.h. jeweils ein Pendel kommt vollständig zur Ruhe, während das andere mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels oder allgemeiner zwischen zwei Zeitpunkten, an denen das Pendel mit minimaler Amplitude schwingt, wird als Schwebungsdauer T_Δ bezeichnet.

Die Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter mathematischer Pendel lassen sich als Überlagerung zweier Eigenschwingungen beschreiben. Diese Eigenschwingungen sind beobachtbar, wenn man die beiden Pendel zu gleichphasigen oder zu gegenphasigen Schwingungen anregt. Im ersten Fall schwingen die Pendel ohne Einfluss der Kopplung mit der Frequenz der ungekoppelten Pendel, im zweiten Fall schwingen sie bei maximalem Einfluss der Kopplung mit größerer Eigenfrequenz. Alle anderen Schwingungen sind als Überlagerungen dieser beiden Eigenschwingungen darstellbar.

Die Bewegungsgleichungen der Pendel haben die Form:

$$(1)\quad \begin{aligned} L\cdot\ddot\varphi_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) &= 0\\ L\cdot\ddot\varphi_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) &= 0\end{aligned}$$

g: Fallbeschleunigung, *L*: Pendellänge, *k*: Kopplungskonstante

Für die (zunächst willkürlich eingeführten) Hilfsgrößen $\varphi_+ = \varphi_1+\varphi_2$ und $\varphi_- = \varphi_1-\varphi_2$ ergeben sich daraus die Bewegungsgleichungen:

$$(2)\quad \begin{aligned} L\cdot\ddot\varphi_+ + g\cdot\varphi_+ &= 0\\ L\cdot\ddot\varphi_- + (g+2k)\cdot\varphi_- &= 0\end{aligned}$$

Deren Lösungen

$$(3)\quad \begin{aligned} \varphi_+ &= a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t)\\ \varphi_- &= a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)\end{aligned}$$

mit den Kreisfrequenzen

$$(4)\quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}},\qquad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}}$$

entsprechen den beschriebenen Eigenschwingungen bei gleich- oder gegenphasiger Anregung (es gilt $\varphi_+ = 0$ bei gegenphasiger und $\varphi_- = 0$ bei gleichphasiger Schwingung). Die Auslenkungen der Pendel lassen sich aus der Summe bzw. der Differenz der beiden Hilfsgrößen berechnen und man erhält die Lösung

$$(5)\quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) + a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)\\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) - a_-\cdot\cos(\omega_- t) - b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)\end{aligned}$$

Hierbei sind die Parameter a_+, a_-, b_+ und b_- zunächst beliebige Größen, die sich aus dem Schwingungszustand der beiden Pendel zum Zeitpunkt t = 0 berechnen lassen. Am leichtesten ist der folgende Fall zu interpretieren, der angeregt wird, wenn Pendel 1 zum Zeitpunkt 0 aus der Nulllage eine Anfangswinkelgeschwindigkeit ψ_0 erhält, während Pendel 2 in Nulllage in Ruhe ist.

$$(6)\quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)\\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)\end{aligned}$$

Dann gilt für die Geschwindigkeiten der beiden Pendel:

$$(7)\quad \begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)\\ \dot\varphi_2 &= \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)\end{aligned}$$

Nach mathematischer Umformung erhält man

$$(8)\quad \begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)\\ \dot\varphi_2 &= \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)\end{aligned}\qquad \text{mit (9)}\quad \begin{aligned}\omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2}\\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Schwingung der beiden Pendel mit der gleichen Kreisfrequenz ω, wobei ihre Geschwindigkeitsamplituden ψ_1 und ψ_2 mit der Kreisfrequenz ω_Δ moduliert werden:

$$(10)\quad \begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)\\ \psi_2(t) &= \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)\end{aligned}$$

AUSWERTUNG

Aus (4) lassen sich die Schwingungsdauern T_+ und T_- der gleich- und der gegenphasigen Eigenschwingung berechnen:

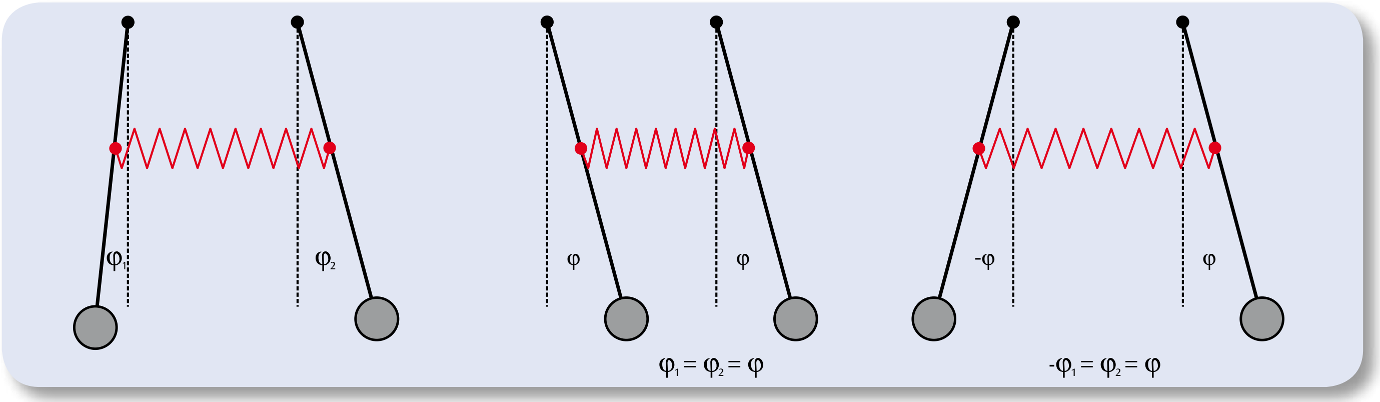
$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad \text{und}\qquad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Für die zur Schwingungsdauer T der gekoppelten Schwingung gilt wegen (9):

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-}\qquad \text{und somit}\qquad T = 2\cdot\frac{T_+\cdot T_-}{T_- + T_+}$$

Die in (10) beschriebene Amplitudenmodulation wird üblicherweise durch die Schwebungsdauer T_Δ charakterisiert, unter der man die Zeit zwischen zwei Stillständen der Pendel versteht:

$$\frac{2\pi}{2T_\Delta} = \omega_\Delta = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+}\qquad \text{und somit}\qquad T_\Delta = \frac{T_+\cdot T_-}{T_+ - T_-}$$



Allgemeine gekoppelte Schwingung | Gleichphasige gekoppelte Schwingung | Gegenphasige gekoppelte Schwingung