Gleichmäßig beschleunigte Rotationsbewegungen

BESTÄTIGUNG DER NEWTON'SCHEN BEWEGUNGSGLEICHUNG

- Punktweise Aufzeichnung des Drehwinkel-Zeit-Diagramms einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsbewegung.
- Bestätigung der Proportionalität zwischen Drehwinkel und Quadrat der Zeit.
- Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom beschleunigten Drehmoment und Bestätigung der Newton'schen Bewegungsgleichung.
- Bestimmung der Winkelbeschleuningung in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment und bestätigung der newton'schen Bewegungsgleichung.

UE1040101

03/16 JS

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse kann analog zu eindimensionalen Translationsbewegungen beschrieben werden. Man ersetzt den Weg *s* durch den Drehwinkel φ, die Geschwindigkeit *v* durch die Winkelgeschwindigkeit ω, die Beschleunigung *a* durch die Winkelbeschleunigung α, die beschleunigende Kraft *F* durch das am starren Körper angreifende Drehmoment *M* und die träge Masse *m* durch das Trägheitsmoment *J* des starren Körpers um die Drehachse.

In Analogie zur Newton'schen Bewegungsgleichung für Translationsbewegungen gilt: Ein drehbar gelagerter starrer Körper mit dem Trägheitsmoment J erfährt die Winkelbeschleunigung α, wenn das Drehmoment

$$M = J \cdot \alpha \qquad (1)$$

angreift. Wirkt ein konstantes Drehmoment, so vollzieht der Körper eine Drehbewegung mit gleichmäßiger Winkelbeschleunigung.

Im Experiment wird dies an einem luftgelagerten und deshalb sehr reibungsarmen Drehsystem untersucht, Es wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ gestartet und dreht sich in der Zeit t um den Winkel

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \qquad (2)$$

Fig. 1: Messanordnung zur Untersuchung gleichmäßig beschleunigter Rotationsbewegungen

GERÄTELISTE

1 Luftgelagertes Drehsystem @ 230 V	1000782 (U8405680-230)
oder	
1 Luftgelagertes Drehsystem @ 115 V	1000781 (U8405680-115)
1 Laserreflexsensor	1001034 (U8533380)
1 Digitalzähler @ 230 V	1001033 (U8533341-230)
oder	
1 Digitalzähler @ 115 V	1001032 (U8533341-115)

Das Drehmoment M resultiert aus der Gewichtskraft einer beschleunigenden Masse m_M, die im Abstand r_M zur Drehachse am Körper angreift.

$$M = r_M \cdot m_M \cdot g \quad (3)$$

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$: Fallbeschleunigung

Bringt man auf der Hantelstange des Drehsystems zusätzlich zwei Massen m_J in festem Abstand r_J zur Drehachse an, so vergrößert sich das Trägheitsmoment gemäß

$$J = J_0 + 2 \cdot m_J \cdot r_J^2 \quad (4)$$

J_0: Trägheitsmoment ohne Zusatzmassen

Sowohl zur Beschleunigung wie auch zur Vergrößerung der Trägheit stehen jeweils mehrere Massestücke zur Verfügung. Außerdem können die Abstände r_M und r_J variiert werden. Somit kann die Winkelbeschleunigung zur Bestätigung von (1) in Abhängigkeit des Trägheitsmoments und des Drehmoments untersucht werden.

AUFBAU

- Luftgelagertes Drehsystem gemäß Bedienungsanleitung aufbauen und horizontal ausrichten.
- Drehscheibe mit Hantelstange aufsetzen und Umlenkrolle aufschrauben.
- Laserreflexsensor auf die Konsole der Start/Stopp-Einheit stellen.
- Auslösehebel der Start/Stopp-Einheit nach oben drücken.
- Gebläse einschalten und Start/Stopp-Einheit mit ihrem Zeiger bis an den Rand der Drehscheibe schieben, so dass diese arretiert ist.
- Drehscheibe so drehen, dass der Zeiger auf die 0°-Position weist.
- Start/Stopp-Einheit unter Beachtung der Farbkodierung der Buchsen an den Start-Eingang und Laserreflexsensor an den Stopp-Eingang des Digitalzählers anschließen.
- Laserreflexsensor so verschieben, dass das Licht durch die Bohrung der 0°-Position der Drehscheibe fällt.
- Wahlschalter des Digitalzählers auf Δt_{AB} / ms stellen.

DURCHFÜHRUNG

a) Punktweise Aufzeichnung einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsbewegung:

- Faden um die mittlere Stufe der Umlenkrolle wickeln (r_M = 10 mm) und Hakengewichte mit insgesamt 3 g Masse anhängen (m_M = 3 g).
- Drehscheibe zum Startwinkel 10° drehen.
- Drehbewegung durch Drücken des Hebels auslösen und warten, bis die Zeitmessung des Digitalzählers beendet ist.
- Zeit t ablesen und in die Tab. 1 eintragen.
- Zeitmessung auch für die Winkel $\varphi = 40°$, 90° und 250° durchführen und Ergebnisse in die Tab. 1 eintragen.

b) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom beschleunigenden Drehmoment:

Zur Messung der Winkelbeschleunigung α wird jeweils die für eine Drehung um 90° benötigte Zeit $t(90°)$ gemessen. In diesem Fall gilt

$$\alpha = \frac{\pi}{t(90°)^2}$$

- Drehscheibe zum Startwinkel 90° drehen.
- Hakengewicht mit der Masse m_M = 1 g an den Faden hängen.
- Drehbewegung durch Drücken des Hebels auslösen und warten, bis die Zeitmessung des Digitalzählers beendet ist.
- Zeit $t(90°)$ ablesen und in die Tab. 2a eintragen.
- Zeitmessung auch für die Massen m_M = 2 g, 3 g und 4 g durchführen und Ergebnisse in die Tab. 2a eintragen.
- Aus den gemessenen Zeiten die Winkelbeschleunigungen α berechnen und in die Tab. 2a eintragen.
- Faden um die kleinste Stufe der Umkenkrolle wickeln (r_M = 5 mm) und Hakengewichte mit insgesamt 3 g Masse anhängen (m_M = 3 g).
- Zeit $t(90°)$ für die Drehung der Scheibe um 90° bestimmen und in die Tab. 2b eintragen.
- Zeitmessung auch für den Radius r_M = 15 mm durchführen und Ergebnis in die Tab. 2b eintragen.
- Aus den gemessenen Zeiten die Winkelbeschleunigungen α berechnen und in die Tab. 2b eintragen.

c) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment:

- Faden um die mittlere Stufe der Umkenkrolle wickeln (r_M = 10 mm) und Hakengewichte mit insgesamt 3 g Masse anhängen (m_M = 3 g).
- Zeit $t(90°)$ für die Drehung der Scheibe um 90° bestimmen und in die Tab. 3 eintragen.
- Zwei Zusatzmassen m_J = 50 g auf der Hantelstange symmetrisch im Abstand r_J = 30 mm einhängen.
- Zeit $t(90°)$ bestimmen und in die Tab. 3 eintragen.
- Abstände r_J in Schritten von 20 mm erhöhen, jeweils die Zeit $t(90°)$ bestimmen und in die Tab. 3 eintragen.

MESSBEISPIEL

a) Punktweise Aufzeichnung einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsbewegung:

Tab. 1: Drehwinkel φ und Zeiten *t* einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsbewegung

φ	*t* / ms	φ	*t* / ms
0°	0	90°	3078
10°	1025	160°	4132
40°	2038	250°	5184

b) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom beschleunigenden Drehmoment:

Tab. 2a: Winkelbeschleunigung α in Abhängigkeit vom Drehmoment *M* (berechnet gemäß Gl 3).
Messung bei konstantem Radius r_M = 10 mm der angreifenden Kraft.

m_M / g	*M* / mN mm	*t*(90°) / s	α / rad/s²
1	98	5,2	0,12
2	196	3,8	0,22
3	294	3,1	0,33
4	392	2,6	0,46

Tab. 2b: Winkelbeschleunigung α in Abhängigkeit vom Drehmoment *M* (berechnet gemäß Gl. 3).
Messung bei konstanter Masse m_M = 3 g des angehängten Hakengewichts.

r_M / mm	*M* / mN mm	*t*(90°) / s	α / rad/s²
5	147	4,4	0,16
10	294	3,1	0,33
15	441	2,5	0,50

c) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment:

Tab. 3: Winkelbeschleunigung α in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment *J* (berechnet gemäß Gl, 4 mit J_0 = 0,873 g m²).
Messparameter: m_M = 3 g, r_M = 10 mm, m_J = 50 g

r_J / mm	*J* / g m²	J_{ges} / g m²	*t*(90°) / s	α / rad/s²
0	0,000	0,873	3,098	0,33
30	0,090	0,963	3,277	0,29
50	0,250	1,123	3,46	0,26
70	0,490	1,363	3,857	0,21
90	0,810	1,683	4,276	0,17
110	1,210	2,083	4,724	0,14
130	1,690	2,563	5,231	0,11
150	2,250	3,123	5,778	0,09
170	2,890	3,763	6,307	0,08
190	3,610	4,483	6,93	0,07
210	4,410	5,283	7,481	0,06

AUSWERTUNG

a) Punktweise Aufzeichnung einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsbewegung:

Erste Variante:

Berechnung der Verhältnisse der Zeiten für die Drehwinkel φ_0 = 10°, φ_1 = 40°, φ_2 = 90° und φ_3 = 250°

$$\frac{t(4\cdot\varphi_0)}{t(\varphi_0)} = \frac{2038\ \text{ms}}{1025\ \text{ms}} = 2{,}0\,,\quad \frac{t(9\cdot\varphi_0)}{t(\varphi_0)} = \frac{3078\ \text{ms}}{1025\ \text{ms}} = 3{,}0\,,$$

$$\frac{t(16\cdot\varphi_0)}{t(\varphi_0)} = \frac{4132\ \text{ms}}{1025\ \text{ms}} = 4{,}0\,,\quad \frac{t(25\cdot\varphi_0)}{t(\varphi_0)} = \frac{5184\ \text{ms}}{1025\ \text{ms}} = 5{,}1$$

Die Zeiten verhalten sich innerhalb der Messgenauigkeit wie 5 : 4 : 3 : 2 : 1, wenn sich die Drehwinkel wie 25 : 16 : 9 : 4 : 1 verhalten. Der Drehwinkel ist also proportional zum Quadrat der Zeit: $\varphi \propto t^2$

Zweite Variante:

Eintragen der Messergebnisse in ein Drehwinkel-Zeit-Diagramm. Die Anpassung einer Parabel an die Messwerte bestätigt, dass der Drehwinkel φ keine lineare Funktion der Zeit *t* ist. (siehe Fig. 2):

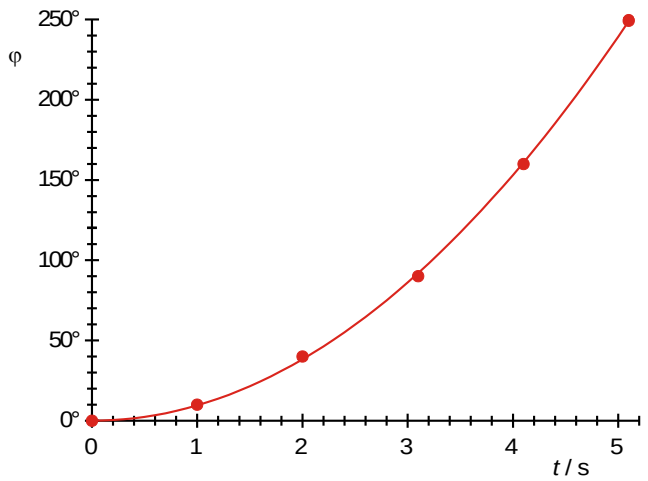

Fig. 2: Drehwinkel-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung

Linearisierung durch Darstellung des Drehwinkels als Funktion des Quadrats der Zeit (siehe Fig. 3):

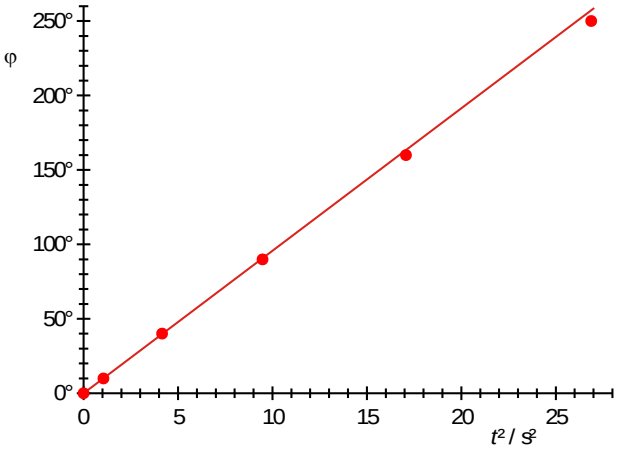

Fig. 3: Drehwinkel als Funktion des Quadrats der Zeit

Die Übereinstimmung der angepassten Ursprungsgeraden mit den Messwerten bestätigt Gl. 2. Aus der Geradensteigung *A* lässt sich die Winkelbeschleunigung berechnen:

$$\alpha = 2 \cdot A = 18{,}68 \frac{\text{grd}}{s^2} = 0{,}326 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

b) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom beschleunigenden Drehmoment:

In Fig. 4 sind die Daten der Tab. 2a und 2b in einem Drehwinkel-Drehmoment-Diagramm dargestellt. Sie stimmen im Rahmen der Messgenauigkeit mit der eingezeichneten Ursprungsgeraden

$$\alpha = \frac{1}{0{,}873 \text{ g m}^2} \cdot M$$

überein. Dadurch wird Gl. 1 bestätigt.

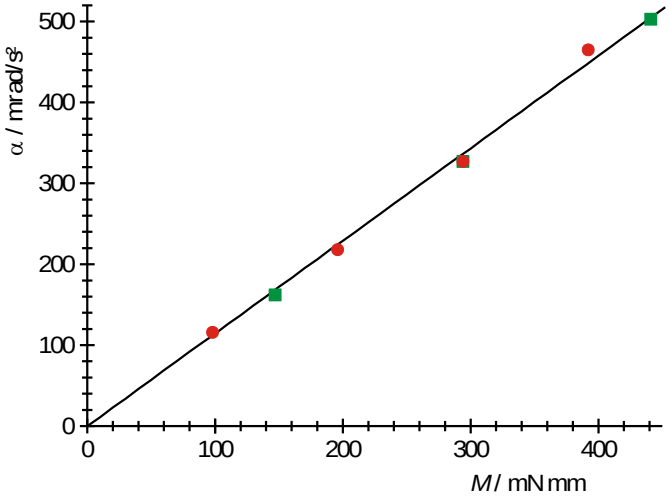

Fig. 4: Winkelbeschleunigung α als Funktion des beschleunigenden Drehmoments *M* (● : r_M = 10 mm, ■ : m_M = 3 g)

c) Bestimmung der Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment:

Aus der Steigung der Ursprungsgeraden in Fig. 4 berechnet man für das Trägheitsmoment der Drehscheibe mit Hantelstange den Wert J_0 = 0,873 g m². Dieser Wert geht in die Berechnung des Gesamtträgheitsmoments *J* in Tab. 3 ein.

In Fig. 5 sind die Daten der Tab. 3 in einem Drehwinkel-Trägheitsmoment-Diagramm dargestellt. Sie stimmen im Rahmen der Messgenauigkeit auf der eingezeichneten Hyperbel

$$\alpha = \frac{294 \text{ mN mm}}{J}$$

überein. Dadurch wird Gl. 1 bestätigt.

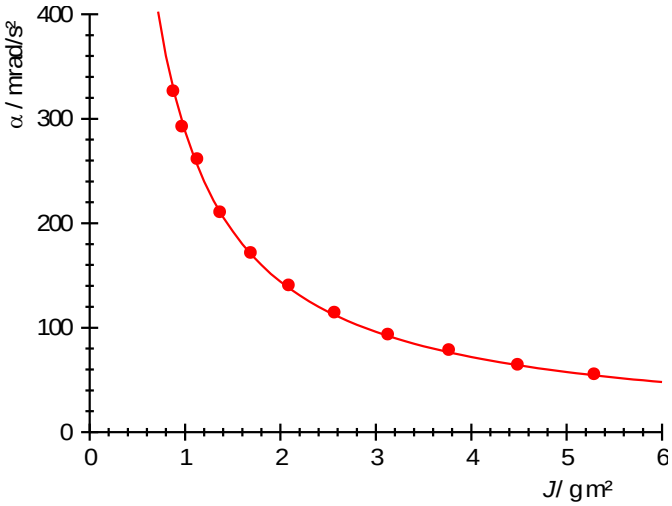

Fig. 5: Winkelbeschleunigung α als Funktion des Trägheitsmoments *J*.

© Copyright 2016 3B Scientific GmbH