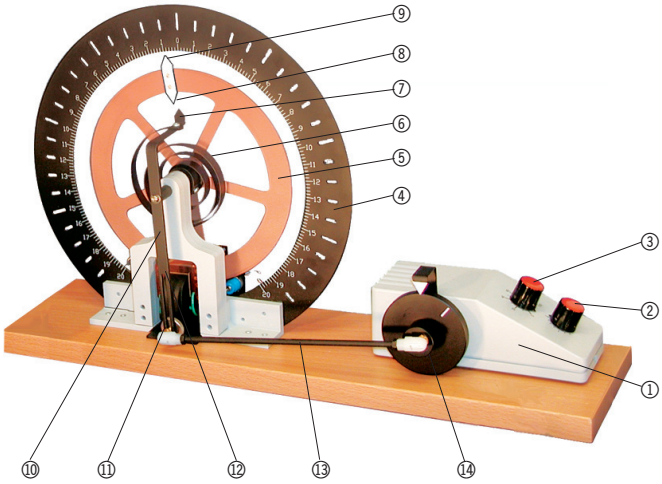
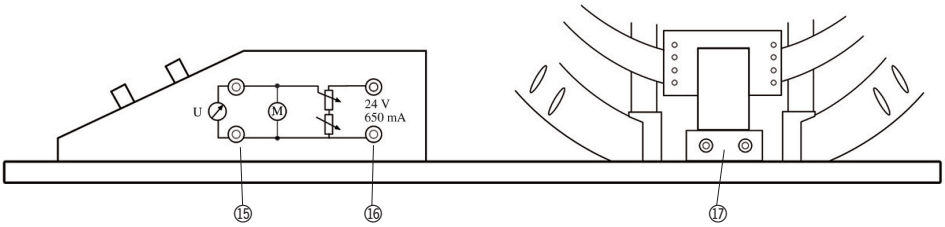
Drehpendel nach Prof. Pohl 1002956

Bedienungsanleitung

06/18 ALF



① Erregermotor
② Drehknopf zur Feineinstellung der Erregerspannung
③ Drehknopf zur Grobeinstellung der Erregerspannung
④ Skalenring
⑤ Pendelkörper
⑥ Schneckenfeder
⑦ Zeiger zur Phasenlage des Erregers
⑧ Zeiger zur Phasenlage des Pendelkörpers
⑨ Zeiger für Auslenkung des Pendelkörpers
⑩ Erreger
⑪ Wirbelstrombremse
⑫ Führungsschlitz und Schraube zur Einstellung der Erregeramplitude
⑬ Schubstange
⑭ Antriebsrad mit Exzenter
⑮ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zum Messen der Erregerspannung
⑯ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zur Versorgung des Erregermotors
⑰ 4-mm-Sicherheitsbuchsen zur Versorgung der Wirbelstrombremse



Das Drehpendel dient zur Untersuchung von freien, erzwungenen und chaotischen Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen.

Versuchsthemen:

- Freie Drehschwingungen bei verschiedenen Dämpfungen (Schwingfall mit mäßiger Dämpfung, aperiodische Schwingung und aperiodischer Grenzfall)
- Erzwungene Schwingungen und deren Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungen
- Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator im Resonanzfall
- Chaotische Drehschwingungen
- Statische Bestimmung der Richtgröße D
- Dynamische Bestimmung des Trägheitsmoments J

1. Sicherheitshinweise

- Das Drehpendel bei der Entnahme aus der Verpackung nicht am Skalierring anfassen! Beschädigungsgefahr! Entnahme immer mit Entnahmehilfe (Innenverpackung) vornehmen!
- Zum Tragen des Drehpendels Gerät immer an der Grundplatte halten.
- Maximal zulässige Versorgungsspannung des Erregermotors (24 V DC) nicht überschreiten.
- Das Drehpendel keinen unnötigen mechanischen Belastungen aussetzen.

2. Beschreibung, technische Daten

Das Drehpendel nach Prof. Pohl besteht aus einem auf einer hölzernen Grundplatte montiertem schwingenden System und einem Elektromotor. Das schwingende System ist ein kugelgelagertes Kupferrad (5), das über eine Spiralfeder (6), die das rücktreibende Moment liefert, mit dem Erregergestänge verbunden ist. Zur Anregung des Drehpendels dient ein Gleichstrommotor mit grob- und fein einstellbarer Drehzahl, der über einen Exzenter (14) mit Schubstange (13) die Spi-

ralfeder in periodischer Folge auseinanderzieht und zusammendrückt und so das Kupferrad in Schwingung versetzt. Für die Dämpfung wird eine elektromagnetische Wirbelstrombremse (11) verwendet. Ein Skalenring (4) mit Schlitzen und Skala in 2-mm-Teilung umgibt das schwingende System; Zeiger befinden sich an Erreger und Resonator.
Das Gerät kann auch in der Demonstration zur Schattenprojektion verwendet werden.

Eigenfrequenz:	ca. 0,5 Hz.
Erregerfrequenz:	0 bis 1,3 Hz (stufenlos einstellbar)
Anschlüsse:	
Motor:	max. 24 V DC, 0,7 A, über 4-mm-Sicherheitsbuchsen
Wirbelstrombremse:	0 bis 20 V DC, max. 2 A, über 4-mm- Sicherheitsbuchsen
Skalenring:	300 mm Ø
Abmessungen:	400 mm x 140 mm x 270 mm
Masse:	4 kg

2.1 Lieferumfang
1 Drehpendel
2 Zusatzmassen 10 g
2 Zusatzmassen 20 g

3. Theoretische Grundlagen

3.1 Verwendete Formelzeichen

D	=	Winkelrichtgröße
J	=	Massenträgheitsmoment
M	=	Rücktreibendes Drehmoment
T	=	Periodendauer
T_0	=	Periodendauer des ungedämpften Systems
T_d	=	Periodendauer des gedämpften Systems
$\hat{M}_E$	=	Amplitude des Erreger-Drehmoments
b	=	Dämpfungsmoment
n	=	Periodenzahl
t	=	Zeit
Λ	=	Logarithmisches Dekrement
δ	=	Dämpfungskonstante
φ	=	Auslenkwinkel
$\hat{\varphi}_0$	=	Amplitude zur Zeit t = 0 s
$\hat{\varphi}_n$	=	Amplitude nach n Perioden
$\hat{\varphi}_E$	=	Erregeramplitude
$\hat{\varphi}_S$	=	Systemamplitude
ω_0	=	Eigenfrequenz des schwingenden Systems
ω_d	=	Eigenfrequenz des gedämpften Systems
ω_E	=	Erregerkreisfrequenz
$\omega_{E\ res}$	=	Erregerkreisfrequenz für max. Amplitude
Ψ_{0S}	=	Systemnullphasenwinkel

3.2 Harmonische Drehschwingung
Eine harmonische Schwingung liegt vor, wenn die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Bei harmonischen Drehschwingungen ist das rücktreibende Drehmoment proportional zum Auslenkwinkel φ:

$$M = D \cdot \varphi$$

Der Proportionalitätsfaktor D (Winkelrichtgröße) lässt sich durch Messung des Auslenkwinkels und des auslenkenden Moments errechnen.
Die Eigenkreisfrequenz des Systems ω_0 ergibt sich nach Messung der Periodendauer T aus

$$\omega_0 = 2\,\pi/T$$

und das Massenträgheitsmoment J aus

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

3.3 Freie gedämpfte Drehschwingung
Bei einem schwingenden System, bei dem durch Reibungsverluste Energie verloren geht, ohne dass diese durch von außen zugeführte Energie kompensiert wird, verringert sich die Amplitude ständig, d.h. die Schwingung ist gedämpft.
Dabei ist das Dämpfungsmoment b proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.
Aus dem Drehmoment-Gleichgewicht ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Für die ungedämpfte Schwingung ist b = 0
Beginnt die Schwingung zur Zeit t = 0 s mit der maximalen Amplitude $\hat{\varphi}_0$ ergibt sich die Lösung der Differenzialgleichung bei einer nicht zu starken Dämpfung ($\delta^2 < \omega_0^2$) (Schwingfall)

$$\varphi = \hat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

δ = b/2 J ist die Dämpfungskonstante und

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

die Eigenfrequenz des gedämpften Systems.
Bei einer starken Dämpfung ($\delta^2 > \omega_0^2$) schwingt das System nicht, sondern kriecht in die Ruhelage (Kriechfall).
Die Periodendauer T_d des gedämpft schwingenden Systems ändert sich gegenüber T_0 des ungedämpft schwingenden Systems bei nicht zu starker Dämpfung nur geringfügig.
Durch Einsetzen von $t = n \cdot T_d$ in die Gleichung

$$\varphi = \hat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

und für die Amplitude nach n Perioden $\varphi = \hat{\varphi}_n$ erhält man mit der Beziehung $\omega_d = 2\,\pi/T_d$

$$\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta} \cdot T_d$$

und daraus das logarithmische Dekrement Λ:

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot ln\left[\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_0}\right] = ln\left[\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

Durch Einsetzen von $\delta = \Lambda / T_d$, $\omega_0 = 2\pi / T_0$ und $\omega_d = 2\pi / T_d$ in die Gleichung

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

erhält man:

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

womit sich die Periodendauer T_d genau berechnen lässt, wenn T_0 bekannt ist.

3.4 Erzwungene Drehschwingung

Bei erzwungenen Drehschwingungen wirkt von außen ein periodisch mit einer Sinusfunktion veränderliches Drehmoment auf das schwingende System. In der Bewegungsgleichung ist dieses Erregermoment zu ergänzen

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \hat{M}_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Nach einer Einschwingzeit schwingt das Drehpendel in einem stationären Zustand mit derselben Kreisfrequenz wie der Erreger, dabei kann ω_E noch gegen ω_0 phasenverschoben sein. Ψ_{0S} ist der System-Nullphasenwinkel, die Phasenverschiebung zwischen dem schwingenden System und dem Erreger.

$$\varphi = \hat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{0S})$$

Für die Systemamplitude $\hat{\varphi}_S$ gilt

$$\hat{\varphi} = \frac{\frac{\hat{M}_E}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Für das Verhältnis von Systemamplitude zu Erregeramplitude gilt

$$\frac{\hat{\varphi}_S}{\hat{\varphi}_E} = \frac{\frac{\hat{M}_E}{J}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

Bei ungedämpften Schwingungen steigt die Amplitude im Resonanzfall (ω_E gleich ω_0) theoretisch unendlich an und führt zur „Resonanzkatastrophe“.
Bei gedämpften Schwingungen und nicht zu starker Dämpfung wird die Systemamplitude maximal, wobei die Erregerkreisfrequenz $\omega_{E\,res}$ kleiner ist als die Eigenkreisfrequenz des Systems. Diese Frequenz ergibt sich aus

$$\omega_{Eres} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Bei starker Dämpfung gibt es keine Amplitudenüberhöhung.
Für den System-Nullphasenwinkel Ψ_{0S} gilt

$$\Psi_{0S} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_\omega^2}\right)$$

Für $\omega_E = \omega_0$ (Resonanz) ist der System-Nullphasenwinkel $\Psi_{0S} = 90°$. Dies gilt auch für $\delta = 0$ mit entsprechendem Grenzübergang.
Bei gedämpften Schwingungen ($\delta > 0$) und $\omega_E < \omega_0$ ergibt sich $0° \leq \Psi_{0S} \leq 90°$, für $\omega_E > \omega_0$ gilt $90° \leq \Psi_{0S} \leq 180°$.
Bei ungedämpften Schwingungen ($\delta = 0$) gilt $\Psi_{0S} = 0°$ bei $\omega_E < \omega_0$ und $\Psi_{0S} = 180°$ für $\omega_E > \omega_0$.

4.Bedienung

4.1 Freie gedämpfte Drehschwingung

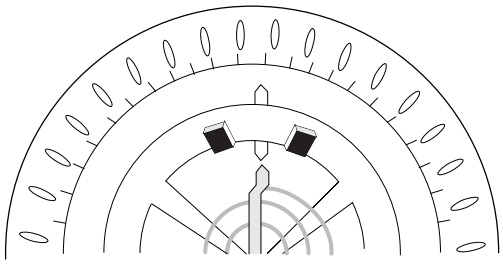
- Wirbelstrombremse mit dem Ausgang für einstellbare Spannung des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.
- Amperemeter in den Stromkreis schalten.
- Dämpfungskonstante in Abhängigkeit vom Strom bestimmen.

4.2 Erzwungene Drehschwingung

- Anschlussbuchsen (16) des Erregermotors mit dem Festspannungsausgang des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.
- Voltmeter mit den Anschlussbuchsen (15) des Erregermotors verbinden.
- Bestimmung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz bzw. der Versorgungsspannung.
- Bei Bedarf Wirbelstrombremse mit dem Ausgang für einstellbare Spannung des Drehpendel-Netzgeräts verbinden.

4.3 Chaotische Schwingungen

- Zur Erzeugung chaotischer Schwingungen stehen 4 Zusatzmassen zur Verfügung, die das lineare Rückstellmoment des Drehpendels verändern.
- Dazu Zusatzmasse am Pendelkörper (5) anschrauben.



5. Versuchsbeispiele

5.1 Freie gedämpfte Drehschwingung

- Zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements Λ werden die Amplituden in mehrfachen Durchläufen gemessen und gemittelt. Dazu werden in zwei Messreihen die Ausschläge des Drehpendels auf der Skala jeweils links und rechts abgelesen.
- Der Startpunkt des Pendelkörpers lag bei 15 bzw. –15 auf der Skala. Fünf Ausschläge wurden abgelesen.
- Aus dem Verhältnis der Amplituden ergibt sich Λ nach der Formel

$$\Lambda = ln\left[\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

n	$\hat{\varphi}$ –				$\hat{\varphi}$ +			
0	–15	–15	–15	–15	15	15	15	15
1	–14,8	–14,8	–14,8	–14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	–14,4	–14,6	–14,4	–14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	–14,2	–14,4	–14,0	–14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	–13,8	–14,0	–13,6	–14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	–13,6	–13,8	–13,4	–13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	Ø $\hat{\varphi}$ –	Ø $\hat{\varphi}$ +	Λ –	Λ +
0	–15	15		
1	–14,8	14,8	0,013	0,013
2	–14,5	14,5	0,02	0,02
3	–14,2	14,1	0,021	0,028
4	–13,8	13,8	0,028	0,022
5	–13,6	13,5	0,015	0,022

- Der gemittelte Wert für Λ beträgt $\Lambda = 0{,}0202$.
- Für die Schwingungsdauer T des Pendels gilt $t = n \cdot T$. Dazu die Zeit für 10 Schwingungen mit einer Stoppuhr messen und T berechnen.

  $T = 1{,}9$ s
- Aus diesen Werten lässt sich die Dämpfungskonstante δ mit $\delta = \Lambda / T$ bestimmen.

  $\delta = 0{,}0106\ s^{-1}$
- Für die Eigenfrequenz ω gilt

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$\omega = 3{,}307$ Hz

5.2 Freie gedämpfte Drehschwingung

- Zur Bestimmung der Dämpfungskonstante δ in Abhängigkeit vom Strom I durch den Elektromagneten wurde der gleiche Versuch mit zugeschalteter Wirbelstrombremse bei I = 0,2 A, 0,4 A und 0,6 A durchgeführt.

I = 0,2 A

n	$\hat{\varphi}$ –				Ø $\hat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–13,6	–13,8	–13,8	–13,6	–13,7	0,0906
2	–12,6	–12,8	–12,6	–12,4	–12,6	0,13
3	–11,4	–11,8	–11,6	–11,4	–11,5	0,0913
4	–10,4	–10,6	–10,4	–10,4	–10,5	0,0909
5	9,2	–9,6	–9,6	–9,6	–9,5	0,1

- Bei T = 1,9 s und gemitteltem $\Lambda = 0{,}1006$ ergibt sich die Dämpfungskonstante: $\delta = 0{,}053\ s^{-1}$

I = 0,4 A

n	$\hat{\varphi}$ –				Ø $\hat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–11,8	–11,8	–11,6	–11,6	–11,7	0,248
2	–9,2	–9,0	–9,0	–9,2	–9,1	0,25
3	–7,2	–7,2	–7,0	–7,0	–7,1	0,248
4	–5,8	–5,6	–5,4	–5,2	–5,5	0,25
5	–4,2	–4,2	–4,0	–4,0	–4,1	0,29

- Bei T = 1,9 s und gemitteltem $\Lambda = 0{,}257$ ergibt sich die Dämpfungskonstante: $\delta = 0{,}135\ s^{-1}$

I = 0,6 A

n	$\hat{\varphi}$ –				Ø $\hat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–9,2	–9,4	–9,2	–9,2	–9,3	0,478
2	–5,4	–5,2	–5,6	–5,8	–5,5	0,525
3	–3,2	–3,2	–3,2	–3,4	–3,3	0,51
4	–1,6	–1,8	–1,8	–1,8	–1,8	0,606
5	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	0,81

- Bei T = 1,9 s und gemitteltem $\Lambda = 0{,}5858$ ergibt sich die Dämpfungskonstante: $\delta = 0{,}308\ s^{-1}$

5.3 Erzwungene Drehschwingung

- Zur Bestimmung der Schwingungsamplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz bzw. der Versorgungsspannung wird der maximale Ausschlag des Pendelkörpers abgelesen.

T = 1,9 s

Motorspannung V	$\hat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- Die Eigenkreisfrequenz des Systems ω_0 ergibt sich nach Messung der Periodendauer T aus

  $\omega_0 = 2\,\pi/T = 3{,}3069$ Hz
- Bei einer Motorspannung von 7,6 V findet die größte Auslenkung statt, d.h. der Resonanzfall tritt ein.
- Dann wurde der gleiche Versuch mit zugeschalteter Wirbelstrombremse bei I = 0,2 A, 0,4 A und 0,6 A durchgeführt.

I = 0,2 A

Motorspannung V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

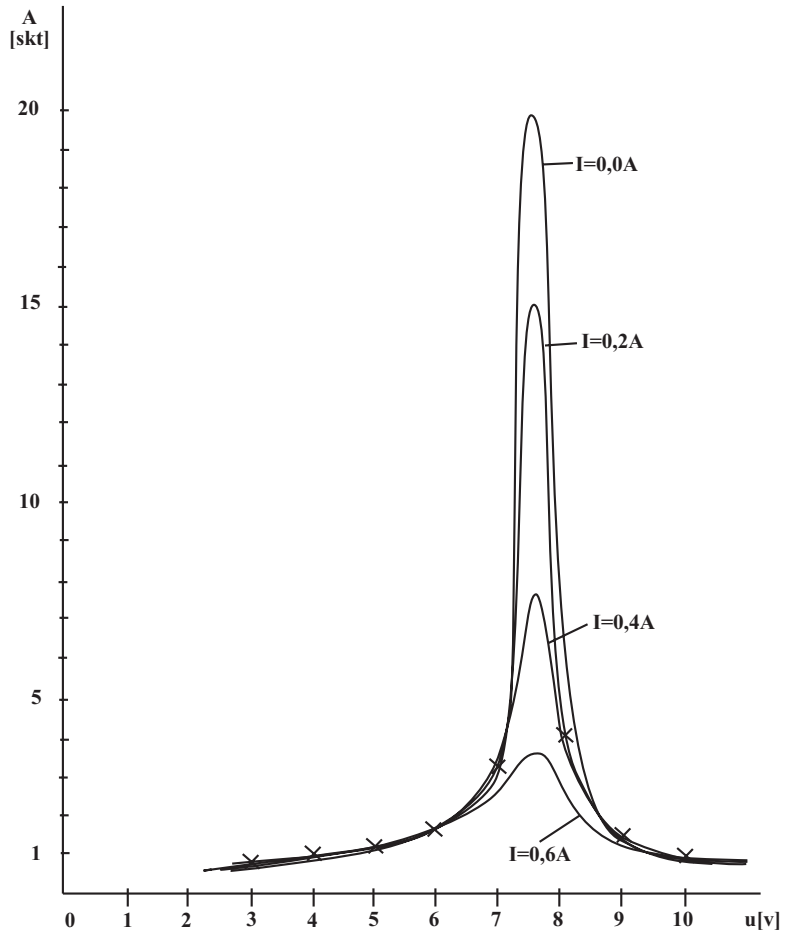
I = 0,4 A

Motorspannung V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

I = 0,6 A

Motorspannung V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- Aus diesen Messungen lassen sich die Resonanzkurven grafisch darstellen, indem man die Amplituden in Abhängigkeit zur Motorspannung aufträgt.
- Aus der Halbwertsbreite des Grafen kann die Resonanzfrequenz grafisch ermittelt werden.



Resonanzkurven